5. Linéarisation des problèmes non linéaires :

La formulation du filtre présentée plus tôt est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons deux de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le *Filtre Linéarisé de Kalman* [4]. La linéarisation autour d'une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures s'appelle le *Filtre de Kalman Etendu* [5]. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor.
Nous examinerons maintenant ces approches en détail.

5.1 Le Filtre de Kalman Linéarisé : [4]

Dans le filtre linéarisé de Kalman, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu

Considérez un modèle non-linéaire d'un système défini comme suit :

Modèle du processus: $$\mathrm{x_k} = \mathrm{f}(\mathrm{x_{k-1}}, \mathrm{u_{k-1}}) + \mathrm{w_{k-1}} \quad \ldots\ldots (1.56)$$

Modèle de mesure: $$\mathrm{z_k} = \mathrm{h}(\mathrm{x_k}) + \mathrm{v_k} \quad \ldots\ldots (1.57)$$

Là où, *f* et *h* sont des fonctions non-linéaires connues, $\mathrm{u_k}$ est la fonction (le vecteur) de commande et $\mathrm{w_k}$ et $\mathrm{v_k}$ sont des processus de type bruit blanc non corrélés. La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.
Supposez qu'une trajectoire approximative x_k^{nom} (figure. 1.3) puisse être déterminée par un quelconque moyen; celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) $\mathrm{x_k}$ peut être écrite en termes de x_k^{nom} et d'erreur $\delta\, x_k$ comme suit:

$$\mathrm{x_k} = x_{\mathrm{k}}^{nom} + \delta x_k \quad \ldots\ldots (1.58)$$

Les équations, (1.56) et (1.57) deviennent alors :

$$x_k^{nom} + \delta x_k = \mathrm{f}(x_{k-1}^{nom} + \delta\, x_{k-1}, \mathrm{u_{k-1}}) + \mathrm{w_{k-1}} \quad \ldots\ldots (1.59)$$

$$\mathrm{z_k} = \mathrm{h}(\mathrm{x_k}^{\mathrm{nom}} + \delta x_k) + \mathrm{v_k} \quad \ldots\ldots (1.60)$$

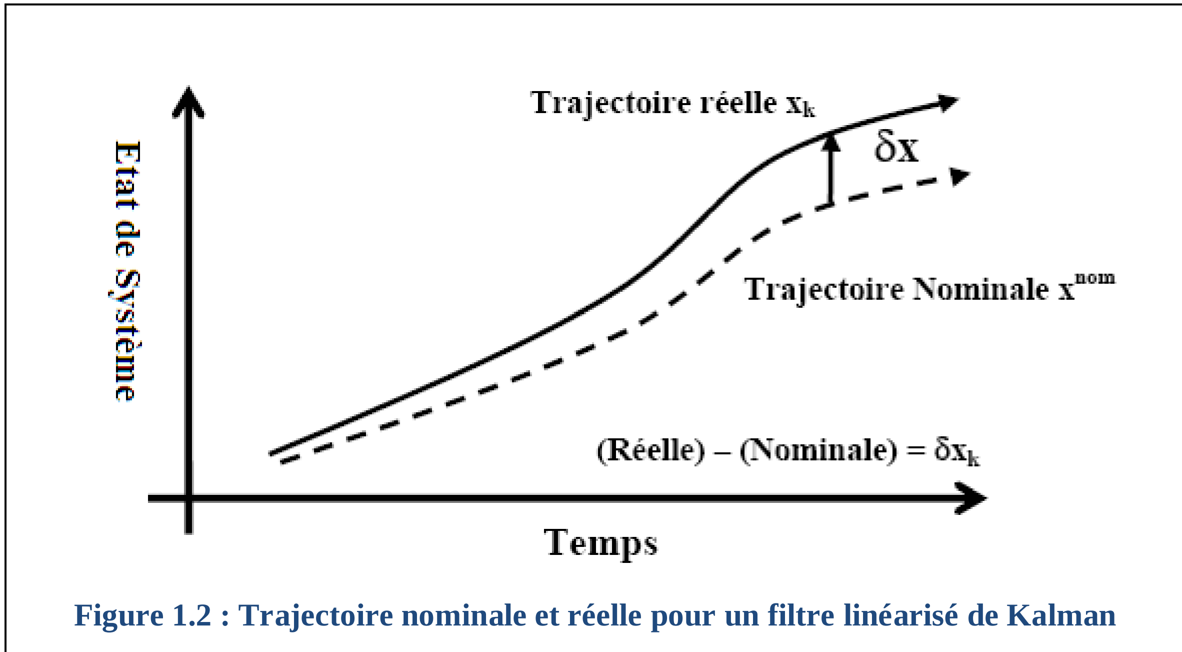


Figure 1.2 : Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation (1.59) et en supposant que δx_k est petit, nous allons réaliser une expansion de f autour de $x_k{}^{nom}$ en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$\mathrm{x_k} = x_k{}^{nom} + \delta x_k = \left(f\ (x_{k-1}{}^{nom}, \mathrm{u_{k-1}}) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}|_{\mathrm{x}=x_{k-1}{}^{nom}} .\ \delta\ x_{k-1} + \text{terme d}'\text{ordres élevés}\right) + \mathrm{w_{k-1}} \dots\dots\dots..(1.61)$$

$$\mathrm{f}(x_{k-1}{}^{nom}, \mathrm{u_{k-1}}) = x_k{}^{nom}$$

$$=>\ \delta\ x_k \approx \mathrm{F_{k-1}}\ \ \delta\ x_{k-1} + \mathrm{w_{k-1}}\ \text{(La dynamique linéarisée)} \dots\dots\dots..\dots\dots\dots..(1.62)$$

Où

$$\mathrm{F_{k-1}} = \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right]_{\mathrm{x}=x_{k-1}{}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_1}} & \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_2}} & \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_3}} & \dots \\ \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_1}} & \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_2}} & \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_3}} & \dots \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{bmatrix}_{\mathrm{x}=x^{nom}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1.63)$$

et

$\mathrm{w_k} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{Q_k})$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Maintenant, la mesure peut être également linéarisé en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant h à $x_k{}^{nom}$ et négligeant les termes d'ordres supérieurs.

$$z_k = \left(h(x_k{}^{nom}) + \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=x_{k-1}{}^{nom}} . \delta x_k + \text{terme d'ordres élevés}\right) + v_k \ldots\ldots\ldots (1.64)$$

$$\delta\, z_k \approx z_k - h(x_k{}^{nom})$$

$$=> \ \delta\, z_k \approx H_k\, \delta x_k + v_k (\text{Équation de mesure linéarisée}) \ldots\ldots\ldots\ldots(1.65)$$

Où

$$H_k = \left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]_{x=x_k{}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \ldots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \ldots \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \end{bmatrix}_{x=x_k{}^{nom}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1.66)$$

$v_k \sim N(0, R_k)$

Les équations (1.62) et (1.65) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. Il est clair que ce modèle de système linéarisé peut être utilisé pour mettre en application un filtre linéarisé de Kalman parce que la relation de la dynamique d'erreur et la relation associée de mesure des erreurs sont devenues linéaires. Ici, nous estimons seulement la valeur d'incrément « l'erreur », ainsi les valeurs réelles de l'état seront l'incrément estimé plus la valeur nominale à l'instant même. Aussi F et H sont obtenus en évaluant les matrices de dérivées partielles (les Jacobiennes de f et h) le long de la trajectoire nominale. La position nominale (ou le vecteur d'état) peut changer avec chaque étape du processus récursif, ainsi les termes de H et de F peuvent être variables avec le temps et doivent être recalculés avec chaque étape récursive. Le problème dans la linéarisation autour de la trajectoire nominale est que la déviation de la trajectoire réelle de la trajectoire nominale tend à augmenter avec le temps. À mesure que la déviation augmente, les poids des termes d'ordres supérieurs dans l'expansion de la série de Taylor de la trajectoire augmentent.

La déviation de la trajectoire de référence est le vecteur d'état et les mesures dans le modèle linéaire sont les vraies mesures moins celles qui ont été prédites par la trajectoire nominale en l'absence du bruit.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état.

Enfin, le filtrage linéarisé a l'avantage de permettre généralement une exécution en temps réel, cependant, il est moins robuste vis-à-vis des approximations non-linéaires des erreurs que le filtrage étendu. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui ramène au filtre de Kalman étendu.

5.2 Le Filtre de Kalman Etendu : [5]

Le filtre de Kalman étendu « EKF » a été développé par Stanley F. Schmidt. Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire. Son fonctionnement consiste simplement à linéarisé tous les modèles non-linéaires de sorte que le filtre linéaire traditionnel de Kalman puisse être appliqué. L'EKF est devenu une approche standard pour un certain nombre d'applications d'estimation non linéaire.

EKF est similaire à un filtre linéarisé de Kalman sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée (figure. 1.4). Ceci signifie que les dérivés partielles sont évaluées le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus:

Modèle non linéaire du processus : $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$ ………………………… (1.67)

Modèle de mesure: $z_k = h(x_k) + v_k$ …………………………………… (1.68)

L'approximation de Taylor de *f* est faite autour de l'estimation de l'instant précédent $\hat{x}_{k-1}$:

$$F(\hat{x}, k) \approx \frac{\partial f(x,k)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad \ldots \ldots \quad (1.69)$$

L'approximation de Taylor de *h* est faite à la position (ou à l'état) prédite correspondante

$$H(\hat{x}, k) \approx \frac{\partial h(x,k)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}_k^-} \quad \ldots \ldots \quad (1.70)$$

Comme dans le cas du filtre linéarisé de Kalman, le développement limité donne cette fois-ci :

$$x_k \approx x_k^- + F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \quad \ldots \ldots \quad (1.71)$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + H(x_k - x_k^-) + v_k \quad \ldots \ldots \quad (1.72)$$

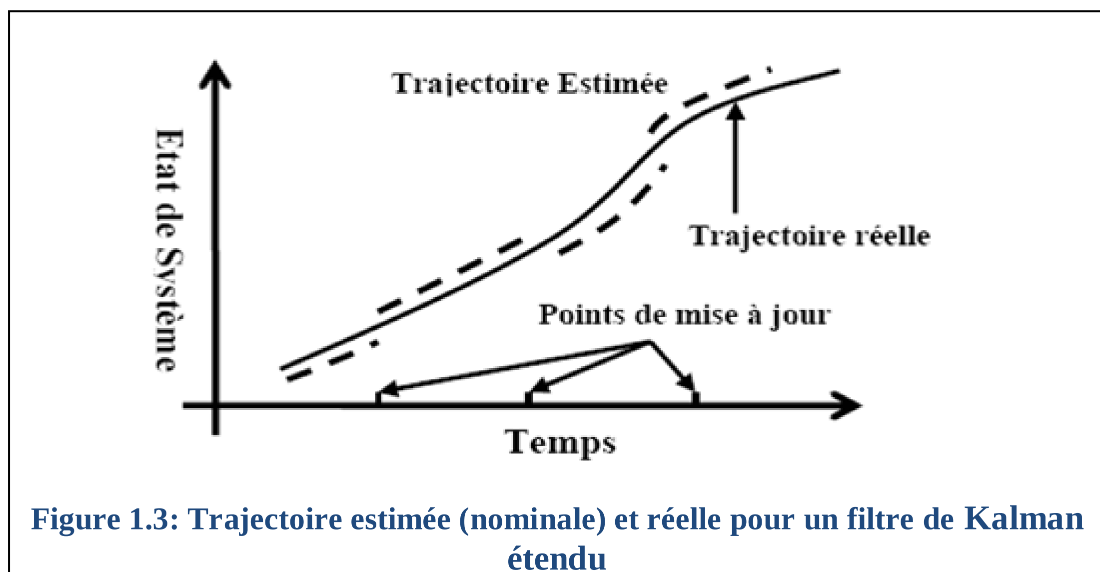


Figure 1.3: Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de Kalman étendu

Les équations (1.71) et (1.72) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. En général, l'EKF est difficile en raison du bouclage (le feedback) de la mesure au modèle du processus, mais il arrive à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation pendant que le temps évolue.

L'avantage du EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes.
Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de Kalman sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(x^{-})$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de *la trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de *la trajectoire nominale* (filtre linéarisé). Lorsque $h(x^{-})$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(x^{-})$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.
Figure (1.5) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire.

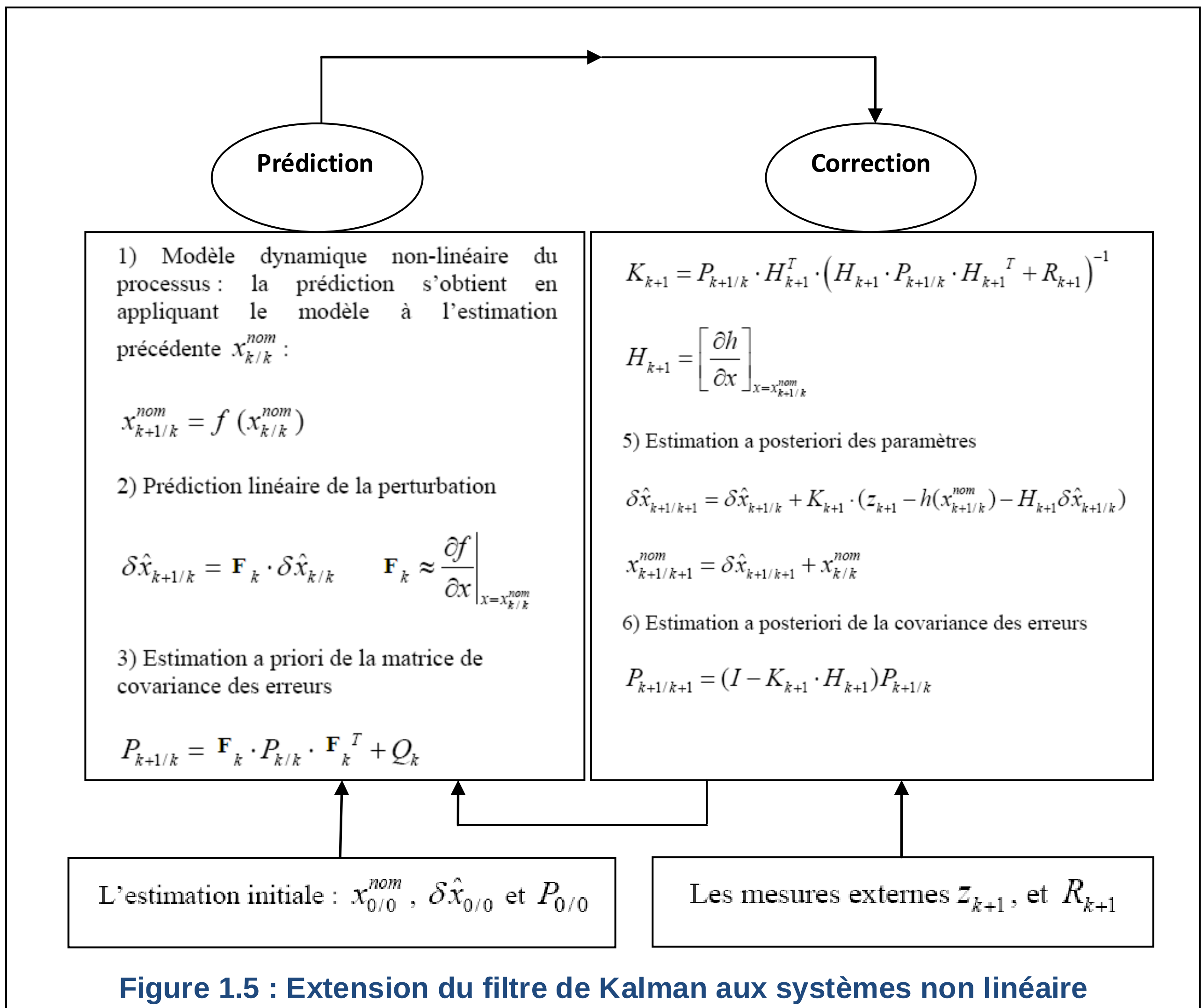


Figure 1.5 : Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire

5.2.1 Quelques aspects du filtre de Kalman étendu :

Le filtre de Kalman étendu est probablement le filtre le plus largement répandu pour un système non linéaire. Cependant, il présente certains inconvénients et défauts :

1. Une opération centrale et essentielle effectuée dans l'EKF est la propagation d'une variable gaussienne (GRV) par la dynamique du système. Dans l'EKF, la distribution d'état est approximée par un GRV, qui est alors propagé analytiquement par une linéarisation du premier ordre du système non linéaire. Les termes négligés dans la linéarisation peuvent être relativement grands ce qui peut présenter de grandes erreurs

2. dans l'estimation de la moyenne et de la covariance a posteriori du GRV transformé.
Ceci peut mener à une performance sub-optimale et parfois à la divergence du filtre.

3. Le coût calculatoire de l'EKF est intensif par rapport au filtrage linéarisé de Kalman.
Puisque la linéarisation est faite autour des estimations obtenues à partir du filtre, nous ne pouvons pas calculer le paramètre de filtre à l'avance, ce qui augmente la charge de calcul en temps réel.

4. La dérivation des matrices Jacobiennes n'est pas triviale dans la plupart des applications et introduisent souvent ensuite des difficultés d'implémentation significatives.

6. Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à la présentation du filtre de Kalman qui consiste le noyau de plusieurs algorithmes de pistage. Au début on a présenté le filtre de Kalman dans le cadre linéaire, et après on a expliqué deux méthodes utilisé pour la linéarisation des problèmes non linéaire.

Il faut noter que L'estimateur le plus largement répandu pour les systèmes non linéaires est probablement le filtre de Kalman étendu (EKF).